Roth 定理的遍历论证明

2025 年 4 月 29 日

摘要

通过遍历理论，或者更一般的，动力系统的方法来研究组合数论是一个相对年轻的方向。二个领域之间的联系在 1977 年 Furstenberg 给出了 Szemeredi 定理的一个遍历论证明而达到高潮. 在本文中, 我们将跟随 Furstenberg 的思想, 给出 Szemeredi 定理的第一个非平凡情形 (Roth 定理) 的证明.

1 预备知识

我们在本章简单的介绍一下遍历理论, 为后文相关结果的证明做出相应的准备.

定义 1.1. 给定两个概率空间 $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$, 我们称一个可测映射 $T : X \to Y$ 是一个保测映射是指: 对任意 $B \in \mathcal{B}$, $T^{-1}B \in \mathcal{A}$ 且有 $\mu(T^{-1}B) = \nu(B)$.

通过实分析理论中标准的利用简单函数逼近可测函数的方法, 我们可以得到

命题 1.1. $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是两个概率空间, 可测映射 $T : X \to Y$ 是保测映射当且仅当对任意 $f \in L^2(X)$, 函数 $f \circ T \in L^2(X)$ 且满足

$$\int_X f \circ T \, d\mu = \int_Y f \, d\nu.$$

每个保测映射会诱导如下线性算子:

定义 1.2. 给定概率空间 $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ 之间的一个保测映射 $T : X \to Y$, 我们称线性算子

$$\Phi_T : L^2(Y) \to L^2(X), f \to f \circ T$$

是保测映射 T 对应的 Koopman 算子.

现在我们引入遍历理论中的基本研究对象——保测系统.

定义 1.3. 一个保测系统是指一个四元组 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, 其中 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 为一个概率空间, $T : X \to X$ 是一个保测映射.

例 1.1. (圆周旋转) 考虑紧群 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, 赋予它由 $[0, 1]$ 上 Lebesgue 测度诱导的 Haar 测度 μ. 对任意 $a \in \mathbb{T}$, 考虑映射 $T_a : \mathbb{T} \to \mathbb{T}, x \to x + a$. 显然 T_a 是一个保测映射, 从而 $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \mu, T_a)$ 形成了一个保测系统.

当然, 紧群 $\mathbb{T}$ 等距同构于圆周 $S^1 \subset \mathbb{C}$, S^1 也能在复数乘法下视为一个群. 在这个观点下 T_a 能对应 S^1 上的映射 $R_\alpha : z \to \alpha \cdot z = e^{2\pi i a} \cdot z$. $(S^1, \mathcal{B}(S^1), \mu, R_\alpha)$ 也是一个保测系统.

以上例子可以推广到任意紧交换群 G 上的" 旋转", 对任意 $\alpha \in G$, 由 Haar 测度的定义, 映射 $R_\alpha : x \to x + \alpha$ 保持测度. 从而 $(G, \mathcal{B}(G), \mu, R_\alpha)$ 是一个保测系统. 我们称这样的系统为 Kronecker 系统.

接下来我们介绍遍历理论中另一个重要的概念——遍历性. " 遍历" 一词来源与 Boltzman 在热力学中提出的" 遍历性假设", 用一句话概括此假设, 就是" 时间上的平均等于空间上的平均". 在保测系统的语境下, " 遍历假设" 实际上就在说随着时间延长, A 中一点 x 的轨迹 $\{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ 中的点落在 A 中的时间的比例会趋向于 $\mu(A)$. 事实上这也是我们后面要讨论的遍历定理的内容. 我们现在先给出遍历性的定义.

定义 1.4. 一个保测系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 是遍历的是指: 对任意 $A \in \mathcal{B}$ 满足 $T^{-1}A = A$, 我们都有 $\mu(A) = 1$ 或者 $\mu(A) = 0$.

命题 1.2. 一个遍历系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 是遍历的当且仅当任意满足 $f \circ T = f$ *a.e.* 的函数 (这样的函数我们称为 T-不变函数) $f \in L^2(X)$ 都几乎处处是一个常数函数.

证明. 对于充分性, 设 $A \in \mathcal{B}$ 满足 $T^{-1}A = A$, 则显然我们有 $1_A \circ T = 1_{T^{-1}A} = 1_A \in L^2(X)$. 所以 1_A 几乎处处为常数, 即 $\mu(A) = 0$ 或 $\mu(A) = 1$.

下面证明必要性, 假设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, $f \in L^2(X)$ 是 T- 不变的, 则对任意 $t \in \mathbb{R}$, 集合

$$A_t := \{x \in X : f(x) > t\}$$

是 T-不变的. 因此 $\mu(A_t) = 0$ 或 $\mu(A_t) = 1$. 设 $r := \inf\{t \in \mathbb{R} : \mu(A_t) = 0\}$, 则因为 $A_r = \cup_{n \geq 1} A_{r+1/n}$, 有 $\mu(A_r) = 0$. 另一方面, 对 $t < r$, 我们有 $\mu(A_t) = 1$. 从而有 $\mu(\{x : f(x) \geq r\}) = 1$, 因此 $f = r$ *a.e.* □

所谓遍历定理, 粗略来说, 其断言遍历系统满足" 遍历假设". 给定一个保测系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, 定义集合 $\mathcal{I} := \{f \in L^2(X) : f \circ T = f \ a.e.\}$. 这是一个 T-不变闭子空间, 因此我们可以考虑正交投影映射 $P_{\mathcal{I}} : L^2(X) \to \mathcal{I}$, $P_{\mathcal{I}}$ 将一个函数 f 映为 $\mathcal{I}$ 中与 f 距离最小的点.

定理 1.3. (Birkhoff 逐点遍历定理) 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统, 则对任意 $f \in L^2(X)$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} f \circ T^n := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n = P_{\mathcal{I}} f \ a.e.$$

特别地, 如果系统是遍历的, 则 $\mathcal{I}$ 中只存在几乎处处为常数的函数且 $P_{\mathcal{I}} f = \int_X f \, d\mu$.

推论 1.4. 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为一个遍历系统, 则对任意 $A \in B$, 和几乎每个 $x \in X$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} |\{n \in \{1, 2, \ldots, N\} : T^n x \in A\}| = \mu(A).$$

证明. 对示性函数 1_A 使用定理1.3即可. □

推论 1.5. 一个保测系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 是遍历的当且仅当对任意 $A, B \in \mathcal{B}$, 有

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

证明. 假设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 是遍历的. 令 $f = 1_B$, 运用定理1.3, 我们得到

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} 1_B(T^n x) = \mu(B) \ a.e.$$

两边乘上 1_A 即为

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} 1_B(T^n x) 1_A(x) = \mu(B) 1_A(x) \ a.e.$$

由控制收敛定理得到

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N}\ \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

反之, 设 $T^{-1}E = E$, $E \in \mathcal{B}$. 令 $A = B = E$, 由条件得

$$\mu(E) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N}\ \mu(E) = \mu(E)^2.$$

所以 $\mu(E) \in \{0, 1\}$, 即 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 是遍历的. □

定理 1.6. (von Neumann 平均遍历定理) 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统, 则对任意 $f \in L^2(X)$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} f \circ T^n \xrightarrow{L^2} P_{\mathcal{I}} f.$$

在这一章的最后我们还需要介绍一个重要的定理——遍历分解定理, 它告诉我们任意一个 T-不变的概率测度 μ 实际上就是一些遍历 T-不变测度的凸组合. 有了这个定理, 我们经常可以不失一般性的假设一个保测系统是遍历的.

定理 1.7. (遍历分解定理) 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 是一个保测系统, 则存在一个 Borel 概率空间 $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$ 和一个可测映射 $y \to \mu_y$ 使得对 $\nu - a.e.\ y \in Y$, 四元组 $(X, \mathcal{B}, \mu_y, T)$ 是一个遍历的保测系统, 且对任意 $A \in \mathcal{B}$, 有

$$\mu(A) = \int_Y \mu_y(A)\ d\nu(y) \tag{1.1}$$

其中(1.1)有时也简记为 $\mu = \int_Y \mu_y\ d\nu(y)$.

注 . 本章的所有内容都可以在标准的遍历理论的教材/讲义中找到, 如 [1, 9, 3].

2 Szemerédi 定理与 Furstenberg 对应原则

2.1 Szemerédi 定理

定理 2.1. (van der Waerden 定理) 给定自然数集的一个有限剖分 $\mathbb{N} = C_1 \cup \cdots \cup C_r$, 则存在 $i \in \{1, \ldots, r\}$ 满足 C_i 中包含任意长度的等差数列, 即对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $a, d \in \mathbb{N}$ 使得 $\{a, a+d, \ldots, a+(k-1)d\} \subset C_i$.

van der Waerden 定理是 Ramsey 理论中最古老的结果之一, 这个定理被 Khinchin 誉为" 数论中的三颗明珠" 之一. 从 van der Waerden 定理出发, 一个自然的问题是: 对于一个自然数的子集, 是否只要它" 足够大", 他就能包含任意长度的等差数列呢? 在 1936 年, Erdós 和 Turán 就提出猜想: 如果一个自然数的子集在自然数中所占的比例是正的 (具有正的" 上密度"), 那么它就会包含任意长的等差数列. 我们接下来定义上密度. 对 $N \in \mathbb{N}$, 我们用 $[1, N]$ 表示 $\mathbb{N} \cap [1, N]$.

定义 2.1. 给定集合 $A \subset \mathbb{N}$, 我们定义 A 的上密度为

$$\bar{d}(A) := \limsup_{N\to\infty} \frac{|A \cap [1, N]|}{N}. \tag{2.1}$$

当极限(2.1)存在, 我们把它记作 $d(A)$, 称为集合 A 的密度.

Erdós 和 Turán 的猜想在 1976 年被 Szemerédi 解决.

定理 2.2. (Szemerédi 定理) 设 $E \subset \mathbb{N}$, $\bar{d}(E) > 0$, 则 E 中含有任意长度的等差数列.

时至今日, Szemerédi 定理已经有了多个证明, 使用的工具横跨各个领域, Szemerédi 定理的每一个新证明, 几乎都会带动一个领域的发展. 更令人振奋的是, 尽管各个证明使用的工具大不相同, 但它们却存在一些共同的思想, 详见 Terence Tao 2006 年的 ICM 报告 [8]. 在本文中, 我们主要关注 Furstenberg[4, 3] 给出的利用遍历理论的证明. 我们会给出等差数列长度为 3 时的完整证明 (长度为 3 对应的结果最早是由 Roth 给出 [7]).

在进一步讨论 Furstenberg 是如何将 Szemerédi 定理的证明转化为一个遍历论的问题之前, 我们先给出上密度的一些基本性质. 给定 $A, B \subset \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, 我们定义 $A - n := \{m \in \mathbb{N} : m + n \in A\}$, $A - B := \{a - b : a \in A, b \in B, a > b\}$.

命题 2.3. 对任意 $A, B \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, 我们有

(1) $\bar{d}(A \cup B) \leq \bar{d}(A) + \bar{d}(B)$;

(2) $\bar{d}(A - n) = \bar{d}(A)$.

证明. (1). 注意到对任意 $N \in \mathbb{N}$, $|A \cup B \cap [1, N]| \leq |A \cap [1, N]| + |B \cap [1, N]|$ 即可.

(2). 显然, 我们只需要证明 $n = 1$ 的情形即可. 注意到对任意 $N \in \mathbb{N}$ 有

$$||(A - 1) \cap [1, N]| - |A \cap [1, N]|| \leq 1,$$

所以

$$\bar{d}(A - 1) - \bar{d}(A) = \limsup_{N\to\infty} \frac{||(A - 1) \cap [1, N]| - |A \cap [1, N]||}{N} = 0.$$

□

2.2 Furstenberg 对应原则

考虑映射 $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \to n + 1$, 由命题2.3(2) 知, 对任意 $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\bar{d}(S^{-1}A) = \bar{d}(A)$. 在这个意义下, $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \bar{d}, S)$ 看起来非常像一个保测系统, 但不幸的是, $\bar{d}$ 并不是一个测度. 而 Furstenberg 对应原则所蕴含的想法就是将我们的上述考虑在某种意义下合理化.

引理 2.4 (Furstenberg 对应原则). 给定 $E \subset \mathbb{N}$, 则存在一个保测系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 和 $A \in \mathcal{B}$ 满足 $\mu(A) = \bar{d}(E)$ 使对任意有限 $F \subset \mathbb{N}$

$$\mu\left(\bigcap_{n\in F} T^{-n}A\right) \leq \bar{d}\left(\bigcap_{n\in F} S^{-n}E\right). \tag{2.2}$$

证明. 记 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. 赋予 $\{0, 1\}$ 离散拓扑 (故是紧集), 令 $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$, 由 Tychonoff 定理, 在乘积拓扑下 X 为紧集. 记 $\mathcal{B}$ 为 X 生成的 σ-代数. $T : X \to X$, $(x_n)_{n=0}^{\infty} \to (x_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ 为转移映射. 设

$$A := \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in X : x_0 = 1\}.$$

我们还需要构造一个不变测度. 设 $\{N_j\}_j$ 为数列使得

$$\bar{d}(E) = \lim_{j\to\infty} \frac{|E \cap [1, N_j]|}{N_j}.$$

令 $1_E = w = (w_n)_{n=0}^{\infty} \in X$, 即 $w_n = 1$ 当且仅当 $n \in E$. 对每个 j, 定义 $(X, \mathcal{B})$ 上的概率测度

$$\mu_j := \frac{1}{N_j} \sum_{n=1}^{N_j} \delta_{T^n w},$$

其中 δ_y 为在 y 点的 Dirac 测度. 不难发现

$$\bar{d}(E) = \lim_{j\to\infty} \frac{E \cap [1, N_j]}{N_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N_j} w_n = \lim_{j\to\infty} \mu_j(A).$$

取 μ 为序列 $\{\mu_j\}_j$ 在弱 * 拓扑意义下的一个极限点, 则 $\mu(A) = \bar{d}(A)$. 不仅如此, μ 还是一个 T-不变测度. 为了证明 μ 是一个 T-不变测度, 我们考虑 X 中如下形式的集合 (称为柱状集):

$$\{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in X : x_0 = a_0, \ldots, x_k = a_k\}$$

其中 $k \in \mathbb{N}$ 为某自然数, $a_0, \ldots, a_k \in \{0, 1\}$. 由 Stone-Weierstrass 定理, 有限个柱状集的特征函数的线性组合在 X 的连续函数空间 $C(X)$ 中是稠密的, 因此我们只需要证明对任意柱状集 B 有 $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$ 即可.

$$\left|\mu_j(B) - \mu_j(T^{-1}B)\right| = \left|\frac{\#\{n \in [1, N_j] : T^n w \in B\} - \#\{n \in [1, N_j - 1] : T^n w \in B\}}{N_j}\right| \le \frac{2}{N_j}$$

令 j 趋向无穷我们可以得到 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 是一个保测系统. 最后我们证明(2.2),

$$\begin{aligned}\mu_j\left(\bigcap_{n\in F} T^{-n}A\right) &= \frac{1}{N_j}\left|\left\{m \in [1, N_j] : (T^m w)_n = w_{m+n} = 1,\ \forall n \in F\right\}\right| \\ &= \frac{1}{N_j}\left|\left\{m \in [1, N_j] : m + n \in E,\ \forall n \in F\right\}\right| = \frac{1}{N_j}\left|\left\{m \in [1, N_j] : m \in \bigcap_{n\in F} S^{-n}E\right\}\right|.\end{aligned}$$

因此, 对任意有限集 $F \subset \mathbb{N}$, 有

$$\bar{d}\left(\bigcap_{n\in F} S^{-n}E\right) \ge \lim_{j\to\infty} \frac{1}{N_j}\left|\bigcap_{n\in F} S^{-n}E \cap [1, N_j]\right| = \lim_{j\to\infty} \mu_j\left(\bigcap_{n\in F} T^{-n}A\right) = \mu\left(\bigcap_{n\in F} T^{-n}A\right).$$

□

现在我们回过头来看 Szemerédi 定理. 注意到

$$\{a, a+b, \ldots, a+kb\} \subset E \Longleftrightarrow a \in E \cap S^{-b}E \cap \cdots \cap S^{-kb}E,$$

因此 Szemerédi 等价于: 若 $E \subset \mathbb{N}$ 满足 $\bar{d}(E) > 0$, 则对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $b \in \mathbb{N}$ 使得 $E \cap S^{-1}E \cap \cdots \cap S^{-kb}E \neq \emptyset$ 事实上, Furstenberg 证明了如下更强的结果:

定理 2.5. 若 $E \subset \mathbb{N}$ 满足 $\bar{d}(E) > 0$, 则对任意 $k \in \mathbb{N}$

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \bar{d}(E \cap S^{-n}E \cdots \cap S^{-kn}E) > 0.$$

通过对应原则, 我们要证明定理2.5, 只需证明

定理 2.6 (Furstenberg 多重回复定理). 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为一个保测系统, $A \in \mathcal{B}$ 且 $\mu(A) > 0$, 则对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\mu(A \cap T^{-n}A \cap \cdots \cap T^{-kn}A) > 0,$$

事实上, 可以证明

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N}\ \mu(A \cap T^{-n}A \cap \cdots \cap T^{-kn}A) > 0.$$

注 . 需要注意的是在 Furstenberg 1977 年的文章, 他并没有证明上式极限存在. 事实上多重恢复性对于证明 Szemerédi 定理已经完全够用. 关于收敛性, 直到 2005 年才由 Host.B, Kra.B [5] 给出了相应的证明.

在本节的最后, 我们介绍如何通过遍历分解定理1.7将多重回复定理2.6化归到遍历系统的情形.

命题 2.7. 如果定理2.6对遍历系统成立, 则其对一般的保测系统均成立.

证明. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为一个保测系统, $A\in B$ 满足 $\mu(A)>0$. 令 $(Y,\mathcal{B}_Y,\nu)$ 为满足定理1.7的 Borel 概率空间. 记

$$Y'=\{y\in Y:\mu_y(A)>0\}$$

由 (1.1) 知 $\nu(Y')>0$. 因为集合 $\tilde{Y}:=\{y\in Y:(X,\mathcal{B},\mu_y,T)\}$ 是满测集, 所以 $Y'\cap\tilde{Y}\neq\emptyset$. 取 $y\in Y'\cap\tilde{Y}$, $(X,\mathcal{B},\mu_y,T)$ 为遍历系统. 利用定理2.6, 取 $n_y\in\mathbb{N}$ 使得

$$\mu_y(A\cap T^{-n_y}A\cap\cdots\cap T^{-kn_y})>0.$$

对 $m\in\mathbb{N}$, 设 $Y_m:=\{y\in Y'\cap\tilde{Y}:n_y=m\}$, 显然 $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}Y_m=Y'\cap\tilde{Y}$, 所以存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\nu(Y_m)>0$. 对 $\varepsilon>0$, 设 $Y_{m,\varepsilon}:=\{y\in Y_m:\mu_y(A\cap T^{-n_y}A\cap\cdots\cap T^{-kn_y})>\varepsilon\}$. 类似的, 因为 $Y_m=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}Y_{m,1/n}$, 存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\nu(Y_{m,\varepsilon})>0$. 记 $Y^*=Y_{m,\varepsilon}$. 由遍历分解定理

$$\begin{aligned}\mu(A\cap T^{-m}A\cap\cdots\cap T^{-km})&=\int_Y\mu_y(A\cap T^{-m}A\cap\cdots\cap T^{-km})\ d\nu(y)\\&\geq\int_{Y^*}\mu_y(A\cap T^{-m}A\cap\cdots\cap T^{-km})\ d\nu(y)\geq\varepsilon\nu(Y^*)>0.\end{aligned}$$

□

3 弱混合系统

3.1 弱混合系统与其基本性质

在本节我们介绍弱混合系统的相关性质与判定条件, 开始之前我们先引入以下记号和乘积系统的概念.

给定函数 $f:X\to\mathbb{C}$ 和 $g:Y\to\mathbb{C}$, 我们定义函数

$$f\otimes g:X\times Y\to\mathbb{C},(f\otimes g)(x,y)=f(x)g(y).$$

定义 3.1 (乘积系统). 给点两个保测系统 $\mathbf{X}=(X,\mathcal{A},\mu,T),\mathbf{Y}=(Y,\mathcal{B},\nu,S)$, 我们定义它们的乘积为保测系统 $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}=(Z,\mathcal{C},\lambda,R)$, 其中 $(Z,\mathcal{C},\lambda)$ 为概率空间 $(X,\mathcal{A},\mu),(Y,\mathcal{B},\nu)$ 的乘积概率空间, $R:Z\to Z$ 定义为 $R(x,y)=(Tx,Sy)$.

定义 3.2 (弱混合). 令 $\mathbf{X}=(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为一个保测系统, $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ 为其乘积系统. 系统 $\mathbf{X}$ 被称为是弱混合的, 是指 $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ 为遍历的.

命题 3.1 (弱混合的等价刻画). 令 $\mathbf{X}=(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, 则如下等价:

(1). $\mathbf{X}$ 为弱混合的;

(2). 对任意的 $A,B\in\mathcal{B}$, 有

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_{n<N}|\mu(A\cap T^{-n}B)-\mu(A)\mu(B)|=0.$$

(3). 对任意 $f, g \in L^2(X)$, 有

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \left| \int_X T^n f \cdot g \, d\mu - \int_X f \, d\mu \int_X g \, d\mu \right| = 0.$$

(4). 对任意 $A, B \in \mathcal{B}$, 存在上密度为 0 的子集 $E \subset \mathbb{N}$ 使得

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\notin E}} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

证明. 我们按照如下顺序证明命题

(1) $\Rightarrow$ (3) 不失一般性, 我们总可以假设 $\int_X f \, d\mu = 0$, 因为我们总是可以用 $f - \int_X f \, d\mu$ 替换 f. 于是, 根据 Cauchy-Schwartz 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} \Big(\mathbb{E}_{n<N} \left| \int_X T^n f \cdot g \, d\mu \right| \Big)^2 &\le \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \left| \int_X T^n f \cdot g \, d\mu \right|^2 \\
&= \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \int_X T^n f \cdot g \, d\mu \int_X T^n \bar{f} \cdot \bar{g} \, d\mu \\
&= \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \int_{X\times X} (f \otimes \bar{f}) \circ (T \times T)^n \cdot (g \otimes \bar{g}) \, d(\mu \otimes \mu).
\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ 为遍历的, 我们对函数 $f \otimes \bar{f}, g \otimes \bar{g} \in L^(X \times X)$ 使用 von-Neumann 遍历定理得

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \int_{X\times X} (f \otimes \bar{f}) \circ (T \times T)^n \cdot (g \otimes \bar{g}) \, d(\mu \otimes \mu) = \int_{X\times X} f \otimes \bar{f} \, d(\mu \otimes \mu) \int_{X\times X} g \otimes \bar{g} \, d(\mu \otimes \mu).$$

注意到 $\int_{X\times X} f \otimes \bar{f} \, d(\mu \otimes \mu) = | \int_X f \, d\mu| = 0$, 所以上述方程可写为:

$$\limsup_{N\to\infty} \Big(\mathbb{E}_{n<N} \left| \int_X T^n f \cdot g \, d\mu \right| \Big)^2 = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \left| \int_X T^n f \cdot g \, d\mu \right|^2 = 0,$$

证明完毕.

(3) $\Rightarrow$ (2) 令 $f = 1_A, g = 1_B$ 即可.

(2) $\Rightarrow$ (4) 固定 $m \in \mathbb{N}$, 定义集合

$$A_m := \{n \in \mathbb{N} : \ |\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)| > \frac{1}{m}\}.$$

注意到

$$\mathbb{E}_{n<N} |\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)| \ge \frac{1}{m} \frac{|A_m \cap [1, N]|}{N},$$

令 $N \to \infty$ 得对所有 $m \in \mathbb{N}$ $\bar{d}(A_m) = 0$. 因此对任意 $m \in \mathbb{N}$, 存在 N_m, 使得对任意 $N > N_m$, 有 $|A_m \cap [1, N]| \le N/m$, 定义

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} (A_m \cap [N_m + 1, N_{m+1}]),$$

显然对任意 $k \in \mathbb{N}$, $A_k \subset A_{k+1}$. 因此对任意 $N \in \mathbb{N}$, 选择 m 使得 $N \in [N_m + 1, N_{m+1}]$, 我们有 $E \cap [1, N] \subset A_m \cap [1, N]$, 进而 $|E \cap [1, N]| \le N/m$. 令 $N \to \infty$ 可得 $\bar{d}(E) = 0$.

最后, 对任意 $m \in \mathbb{N}$, 令 $N \ge N_m$, 则假若 $N \notin E$, 必有 $N \notin A_m$, 所以 $|\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)| < 1/m$.

(4) ⇒ (1) 我们考虑利用推论 1.5 说明 $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ 是遍历的. 取 $A_i, B_i \in \mathcal{B}$, 由 (4), 存在 $E_i \subset \mathbb{N}$ 满足 $\bar{d}(E_i) = 0$, 使得

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\notin E_i}} \mu(A_i \cap T^{-n}B_i) = \mu(A_i)\mu(B_i), i = 1, 2.$$

集合 $E := E_1 \cup E_2$ 也满足 $\bar{d}(E) = 0$ 且有

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\notin E}} (\mu\otimes\mu)\left((A_1\times B_1)\cap(T\times T)^{-n}(A_2\times B_2)\right) = \mu(A_1)\mu(A_2)\mu(B_1)\mu(B_2).$$

因此

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N}(\mu\otimes\mu)(((A_1\times B_1)\cap(T\times T)^{-n}(A_2\times B_2))) = (\mu\otimes\mu)(A_1\times B_1)(\mu\otimes\mu)(A_2\times B_2).$$

在通过标准的利用可测方体逼近乘积测度下的可测集的操作, 我们得到对任意 $A, B \in \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N}(\mu\otimes\mu)(A\cap(T\times T)^{-n}B) = (\mu\otimes\mu)(A)(\mu\otimes\mu)(B).$$

所以由推论 1.5, $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ 是遍历的.

□

我们在本节再给出一个系统是弱混合的等价条件, 它会在我们下节证明弱混合系统的多重回复定理的时候派上用场.

命题 3.2. 设 $k \in \mathbb{N}$, 一个保测系统 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 是弱混合的当且仅当 $(X, \mathcal{B}, \mu, T^k)$ 是弱混合的.

证明. 我们先假设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 是弱混合的. 由命题 3.1(4), 存在 $A, B \in \mathcal{B}$ 和上密度为 0 的自然数子集 E 使得

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\notin E}} \mu(A\cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

定义 $\tilde{E} := \{m \in \mathbb{N} : \ km \in E\}$. 显然 $\bar{d}(\tilde{E}) = 0$ 且

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ m\notin \tilde{E}}} \mu(A\cap(T^k)^{-m}B) = \lim_{\substack{m\to\infty \\ m\notin \tilde{E}}} \mu(A\cap T^{-mk}B) = \mu(A)\mu(B),$$

因此 $(X, \mathcal{B}, \mu, T^k)$ 是弱混合的.

反过来, 假设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T^k)$ 是弱混合的. 假若 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 不是弱混合的, 由定义有:
$(X\times X, \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}, \mu\otimes\mu, T\times T)$ 不是遍历的, 则存在 $T\times T$ 的不变集 $A \in \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ 满足 $\mu\otimes\mu(A) \in (0, 1)$. 注意到 A 也是保测变换 $(T^k\times T^k) = (T\times T)^k$ 下的不变集, 这意味着 $(X\times X, \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}, \mu\otimes\mu, T^k\times T^k)$ 也不是遍历的, 产生了矛盾! □

3.2 弱混合系统的多重回复定理

在本小节中我们将会证明弱混合系统的多重回复定理, 为了简化记号, 在不产生歧义的情况下, 我们用 Tf 表示 $f\circ T$. 我们将证明如下命题:

命题 3.3. 设 $r \geq 1$. $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为一个弱混合系统, 则对于任何 $f_1, \ldots, f_r \in L^\infty(X)$,

$$\mathbb{E}_{n<N} T^n f_1 \cdots T^{rn} f_r \xrightarrow{L^2} \prod_{i=1}^{r} \int_X f\, d\mu_i,\ N\to\infty.$$

特别地, 若 $A \in \mathcal{B}$ 满足 $\mu(A) > 0$, 我们令 $f_1 = \cdots = f_r = 1_A$ 就可以得到弱混合系统的多重回复性.

在证明命题3.3之前, 我们需要引入如下关键性的引理, 即 van der Corput 引理:

引理 3.4. (van der Corput) 设 $\{x_n\}$ 为 Hilbert 空间 V 中的一列元素, 且对任意 n, $\|x_n\| \le 1$, 则

$$\limsup_{N\to\infty} \|\mathbb{E}_{n<N} x_n\|^2 \le \limsup_{H\to\infty}\ \mathbb{E}_{h<H} \left|\limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N}\langle x_n, x_{n+h}\rangle\right|.$$

证明. 我们引入如下记号: 设 H 为一个参数, 我们记 $o_{H,N\to\infty}(1)$ 表示 V 中当 $N\to\infty$ 时, 范数趋于 0 的量, 收敛速度与 H 有关. 需要注意的是, 在不同的式子中此记号可能代表不同的量.

固定 H, 设 $h<H$, 我们有如下观察:

$$\mathbb{E}_{n<N} x_n = \mathbb{E}_{n<N} x_{n+h} + o_{H,N\to\infty}(1), \tag{3.1}$$

这是因为

$$\|\mathbb{E}_{n<N} x_n - \mathbb{E}_{n<N} x_{n+h}\| = \|\frac{1}{N}(x_0 + \cdots + x_{h-1} - x_N - \cdots - x_{N+h-1})\| < \frac{2H}{N}.$$

对(3.1)左右同时对 $h<H$ 取平均有

$$\mathbb{E}_{n<N} x_n = \mathbb{E}_{n<N}\mathbb{E}_{h<H} x_{n+h} + o_{H,N\to\infty}(1),$$

于是

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}_{n<N} x_n\|^2 &= \|\mathbb{E}_{n<N}\mathbb{E}_{h<H} x_{n+h}\|^2 + o_{H,N\to\infty}(1)\\
&\le \mathbb{E}_{n<N}\|\mathbb{E}_{h<H} x_{n+h}\|^2 + o_{H,N\to\infty}(1)\\
&= \mathbb{E}_{n<N}\langle \mathbb{E}_{h<H}, \mathbb{E}_{h<H}\rangle + o_{H,N\to\infty}(1)\\
&\le \mathbb{E}_{h_1<H}\ \mathbb{E}_{h_2<H}\left|\mathbb{E}_{n<N}\langle x_{n+h_1}, x_{n+h_2}\rangle\right| + o_{H,N\to\infty}(1).
\end{aligned}$$

记 $\mathbb{E}_{h_1,h_2<H} := \mathbb{E}_{h_1<H}\ \mathbb{E}_{h_2<H}$, 上式能写为

$$\|\mathbb{E}_{n<N} x_n\|^2 \le \mathbb{E}_{h_1,h_2<H}\left|\mathbb{E}_{n<N}\langle x_{n+h_1}, x_{n+h_2}\rangle\right| + o_{H,N\to\infty}(1). \tag{3.2}$$

再次利用(3.1), 我们有

$$\mathbb{E}_{n<N}\langle x_{n+h_1}, x_{n+h_2}\rangle = \mathbb{E}_{n<N}\langle x_n, x_{n+h_2-h_1}\rangle + o_{H,N\to\infty}(1), \tag{3.3}$$

和

$$\mathbb{E}_{n<N}\langle x_{n+h_1}, x_{n+h_2}\rangle = \mathbb{E}_{n<N}\langle x_{n+h_1-h_2}, x_n\rangle + o_{H,N\to\infty}(1) = \overline{\mathbb{E}_{n<N}\langle x_n, x_{n+h_1-h_2}\rangle} + o_{H,N\to\infty}(1). \tag{3.4}$$

将(3.3)和(3.4)带入(3.2), 更具体地说, $h_2 \ge h_1$ 时带入 (3.3), $h_2 < h_1$ 时带入(3.4) 得

$$\|\mathbb{E}_{n<N} x_n\|^2 \le \frac{1}{H^2}\sum_{h<H} w(h)\left|\mathbb{E}_{n<N}\langle x_n, x_{n+h}\rangle\right| + o_{H,N\to\infty}(1), \tag{3.5}$$

其中 $w(h)$ 为当 $h_1, h_2 < H$ 时, $h = h_1 - h_2$ 或 $h = h_2 - h_1$ 的所有可能的方法的数量, 因此

$$w(h) = \begin{cases} H, & h = 0;\\ 2(H-h), & 1 \le h \le H-1.\end{cases}$$

在左右两边对 N 同时取上极限,

$$\limsup_{N\to\infty}\|\mathbb{E}_{n<N} x_n\|^2 \le \frac{1}{H^2}\sum_{h<H} w(h)\limsup_{N\to\infty}\left|\mathbb{E}_{n<N}\langle x_n, x_{n+h}\rangle\right|. \tag{3.6}$$

我们断言, 对任意有界数列 $\{y_h\}$, 我们有

$$\limsup_{H\to\infty}\frac{1}{H^2}\sum_{h<H}w(h)y_h\le\limsup_{H\to\infty}\mathbb{E}_{h<H}y_h. \tag{3.7}$$

假设断言成立, 只需令 $y_h=\limsup\limits_{N\to\infty}|\mathbb{E}_{n<N}\langle x_n,x_{n+h}\rangle|$, 则引理 3.4 成立.

接下来我们证明断言. 注意到

$$\sum_{h<H}w(h)y_h=-Hy_0+2\sum_{H'=1}^{H}\sum_{h<H'}y_h. \tag{3.8}$$

设 $H\ge H_0$ 时, $\mathbb{E}_{h<H}y_h\le C$, 由(3.8), 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{H^2}\sum_{h<H}w(h)y_h &= -\frac{y_0}{H}+2\sum_{H'=1}^{H_0-1}\sum_{h<H'}y_h+2\sum_{H'=H_0}^{H}\sum_{h<H'}y_h\\ &\le \frac{y_0}{H}+2\frac{H_0^2}{H}+\frac{2}{H^2}\sum_{H'=H+0}^{H}CH'\\ &\to C,\ H\to\infty,\end{aligned}$$

证毕. □

证明. (命题3.3) 我们对 r 进行归纳. 若 $r=1$, 命题就是 von-Neumann 遍历定理. 假设 $r\ge2$, 不失一般性, 我们可以假设 $\int_X f_r\,d\mu=0$. 又因为 $f_i\in L^\infty(X)$, 我们也总能假设 $\|f_i\|_\infty\le1$. 我们记 $\Delta_hf_i:=f_i\overline{T^hf_i}$. 注意到 $\|\Delta_hf_i\|_\infty\le1$, 我们有对任意 $i,h\in\mathbb{N}$, $\|\Delta_hf_i\|_2\le1$.

我们的目标是证明

$$\mathbb{E}_{n<N}T^nf_1\cdots T^{rn}f_r\xrightarrow{L^2}0,\ N\to\infty,$$

令 $x_n:=T^nf_1\dots T^{rn}f_r$, 注意到

$$\langle x_n,x_{n+h}\rangle=\int_X(T^n\Delta_hf_1)\dots(T^{rn}\Delta_{rh}f_r)\,d\mu,$$

由引理3.4, 我们只需要证明

$$\limsup_{H\to\infty}\ \mathbb{E}_{h<H}\left|\limsup_{N\to\infty}\ \mathbb{E}_{n<N}\int_X(T^n\Delta_hf_1)\dots(T^{rn}\Delta_{rh}f_r)\,d\mu\right|=0. \tag{3.9}$$

因为 T 为保测映射, 我们有

$$\int_X(T^n\Delta_hf_1)\dots(T^{rn}\Delta_{rh}f_r)\,d\mu=\int_X(\Delta_hf_1)(T^n\Delta_hf_2)\dots(T^{(r-1)n}\Delta_{rh}f_r)\,d\mu.$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式, 得

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}_{n<N}\int_X(T^n\Delta_hf_1)\dots(T^{rn}\Delta_{rh}f_r)\,d\mu\right| &= \left|\int_X(\Delta_hf_1)\mathbb{E}_{n<N}(T^n\Delta_{2h}f_2)\dots(T^{(r-1)n}\Delta_{rh}f_r)\,d\mu\right|\\ &\le\|\mathbb{E}_{n<N}(T^n\Delta_hf_2)\dots(T^{(r-1)n}\Delta_{rh}f_r)\|_2,\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$, 由归纳假设, 有

$$\begin{aligned}\limsup_{N\to\infty}\left|\mathbb{E}_{n<N}\int_X(T^n\Delta_hf_1)\dots(T^{rn}\Delta_{rh}f_r)\,d\mu\right| &\le\left|\prod_{j=2}^{r}\int_X(\Delta_{jh}f_j)\,d\mu\right|\\ &\le\left|\int_X(\Delta_{rh}f_r)\,d\mu\right|=\left|\langle f_r,T^{rh}f_r\rangle\right|.\end{aligned}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $L^2(X)$ 中的内积, 对 $f,g\in L^2(X)$, $\langle f,g\rangle := \int_X f\bar{g}\ d\mu$. 因为 $\mathbf{X}=(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 是弱混合的, 由命题3.2, $(X,\mathcal{B},\mu,T^r)$ 也是弱混合的, 对此系统利用命题3.1(4), 又因为 $\int_X f_r\ d\mu = 0$, 我们得到

$$\limsup_{H\to\infty}\ \mathbb{E}_{h<H}\left|\langle f_r, T^{rh}f_r\rangle\right| = \limsup_{H\to\infty}\ \mathbb{E}_{h<H}\left|\int_X (T^r)^h\bar{f}_r\cdot f_r\ d\mu\right| = 0,$$

于是(3.9)成立, 命题证毕. □

4 几乎周期系统

4.1 几乎周期函数

定义 4.1. 设 $\mathbf{X}$ 为一保测系统, $f\in L^2(X)$. 我们称 f 是几乎周期的 (或者, 紧的), 是指它的轨道闭包 $\overline{\{T^nf:\ n\in\mathbb{N}\}}$ 作为 $L^2(X)$ 的子集是紧的. 几乎周期函数的全体构成的集合我们记为 $\mathcal{H}_{ap}$. 若 $L^2(X)=\mathcal{H}_{ap}$, 则称保测系统 $\mathbf{X}$ 是一个几乎周期系统.

我们在本节探究一些几乎周期函数的基本性质.

引理 4.1. 设 $\mathbf{X}$ 为一个保测系统, 令 $\phi: L^2(X)\times L^2(X)\to L^2(X)$ 满足

(1) $\phi(Tf,Tg)=T\phi(f,g)$;

(2) ϕ 一致连续;

则对任意 $f,g\in\mathcal{H}_{ap}$, $\phi(f,g)\in\mathcal{H}_{ap}$.

证明. 固定 $\varepsilon>0$, 因为 ϕ 是一致连续的, 故存在 $\delta>0$ 使得如果 $f_1,f_2,g_1,g_2\in L^2(X)$ 满足 $\|f_1-f_2\|_2<\delta$, $\|g_1-g_2\|_2<\delta$, 则有 $\|\phi(f_1,g_1)-\phi(f_2,g_2)\|_2<\varepsilon$.

设 $f,g\in\mathcal{H}_{ap}$, 令 $\{B_i\},\{C_i\}$ 分别为 f 和 g 的轨道闭包的一个有限开覆盖, 其中每一个开集的直径都小于 δ. 于是对任意 $n\in\mathbb{N}$, 我们有 $T^nf\in B_{i(n)}, T^ng\in C_{j(n)}$. 因此 $T^n\phi(f,g)=\phi(T^nf,T^ng)\in\phi(B_{i(n)},C_{j(n)})$. 由于每个 B_i,C_j 的直径都小于 δ, 我们知道 $\phi(B_i,C_j)$ 的直径小于 ε. 所以

$$\overline{\{T^n\phi(f,g):\ n\in\mathbb{N}\}}\subset\bigcup_{i,j}\phi(B_i,C_j).$$

注意到右边的并是有限的, 所以 $\phi(f,g)$ 的轨道闭包是完全有界的, 进而是紧的. 这就完成了 $\phi(f,g)\in\mathcal{H}_{ap}$ 的证明 □

命题 4.2. 设 $\mathbf{X}$ 为一个保测系统, $\mathbf{X}$ 上几乎周期函数的全体构成的集合为 $\mathcal{H}_{ap}$. 则

(1). $\mathcal{H}_{ap}$ 为一个 T-不变的线性闭子空间;

(2). 设实值函数 $f,g\in\mathcal{H}_{ap}$, 则 $\min(f,g),\max(f,g)\in\mathcal{H}_{ap}$.

(3). 对任意 $f,g\in L^\infty(X)\cap\mathcal{H}_{ap}$, $fg\in\mathcal{H}_{ap}$.

证明. (1). 显然, $\mathcal{H}_{ap}$ 是 T- 不变的. 接下来我们证明 $\mathcal{H}_{ap}$ 是闭线性子空间. 注意到映射 $(f,g)\to f+g$ 是一致连续的, 由引理4.1 知, $\mathcal{H}_{ap}$ 为一个线性子空间. 接下来证明其是闭集. 设 $f\in\overline{\mathcal{H}_{ap}}$, 我们证明 f 是几乎周期函数. 设 $\varepsilon>0$, 令 $g\in\mathcal{H}_{ap}$ 使得 $\|f-g\|_2<\varepsilon/2$. 由于 T 是保测变换, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, $\|T^nf-T^ng\|_2\le\varepsilon/2$. 取 $x_1,\ldots,x_m\in\overline{\{T^ng:\ n\in\mathbb{N}\}}$ 使得

$$\overline{\{T^ng:\ n\in\mathbb{N}\}}\subset\bigcup_{i=1}^m B(x_i,\frac{\varepsilon}{2}),$$

从而有

$$\overline{\{T^n f:\ n\in\mathbb{N}\}}\subset\bigcup_{i=1}^{m}B(x_i,\varepsilon),$$

所以 f 的轨道闭包完全有界, 为紧集, f 为几乎周期函数.

(2). 设 $\phi: L^2(X,\mathbb{R}\times L^2(X,\mathbb{R}))\to L^2(X,\mathbb{R}),(f,g)\to\min(f,g)$. 显然有

$$T\phi(f,g)(x)=\phi(f,g)(Tx)=\min(f(Tx),g(Tx))=\min(Tf(x),Tg(x)).$$

其次, 注意到

$$\begin{aligned}\|\phi(f_1,g_1)-\phi(f_2,g_2)\|_2&=\|\frac{1}{2}(f_1+g_1)-\frac{1}{2}|f_1-g_1|-\frac{1}{2}(f_2+g_2)+\frac{1}{2}|f_2-g_2|\|_2\\&\le\|\frac{1}{2}\left[(f_1-g_1)+(f_2-g_2)\right]\|+\|\frac{1}{2}\left(|f_1-g_1|-|f_2-g_2|\right)\|_2\\&\le\|f_1-g_1\|_2+\|f_2-g_2\|_2.\end{aligned}$$

因此 ϕ 是一致连续的, 从而由引理4.1, $\min(f,g)\in\mathcal{H}_{ap}$. 完全类似的, 我们也能证明 $\max(f,g)\in\mathcal{H}_{ap}$.

(3). 设 $f,g\in L^\infty(X)\cap\mathcal{H}_{ap}$. 不失一般性, 我们可以假设 $\|f\|_\infty=\|g\|_\infty=1$. 取定 $\varepsilon>0$, 存在 $F\subset\overline{\{T^n f:n\in\mathbb{N}\}}$, $|F|<\infty$; $G\subset\overline{\{T^n g:n\in\mathbb{N}\}}$, $|G|<\infty$ 满足

$$\overline{\{T^n f:n\in\mathbb{N}\}}\subset\bigcup_{f\in F}B(f,\varepsilon/2);$$

$$\overline{\{T^n g:n\in\mathbb{N}\}}\subset\bigcup_{g\in G}B(g,\varepsilon/2).$$

对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $f'\in F,g'\in G$ 使得

$$\|T^n f-f'\|_2<\frac{\varepsilon}{2},\ \|T^n g-g'\|_2<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而

$$\begin{aligned}\|T^n(fg)-f'g'\|_2&\le\|(T^n f-f')T^n g\|_2+\|f'(T^g-g')\|_2\\&\le\|g\|_\infty\|T^n f-f'\|_2+\|f\|_\infty\|T^n g-g'\|_2<\varepsilon.\end{aligned}$$

记 $H=\{fg:f\in F,g\in G\}$, 则 H 是一个有限集, 且

$$\overline{\{T^n(fg):n\in\mathbb{N}\}}\subset\bigcup_{h\in H}B(h,\varepsilon).$$

于是 fg 的轨道是完全有界的, 从而是紧的, 即 $fg\in\mathcal{H}_{ap}$.

□

4.2 几乎周期系统的多重回复定理

在本章的最后我们证明几乎周期系统的多重回复定理.

定理 4.3. 设 $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为一个保测系统, $f \in L^\infty(X)$ 为一个几乎周期函数, 假设 $f \geq 0$, 且 f 不几乎处处为 0, 则对任意 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, 有

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \int_X f T^n f \cdots T^{(k-1)n} f \, d\mu > 0.$$

特别的, 若 $\mathbf{X}$ 是一个几乎周期系统, $A \in \mathcal{B}$ 满足 $\mu(A) > 0$, 取 $f = 1_A$ 则有

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \int_X f T^n f \cdots T^{(k-1)n} f \, d\mu = \liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \mu(A \cap T^{-n}A \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n}A) > 0.$$

我们先给出几乎周期函数的一个性质.

定义 4.2. 一个集合 $A \subset \mathbb{N}$ 被称为是 syndetic 集, 是指存在 $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{N} (A - n),$$

换句话说, 集合 A 在数轴上相邻元素之间的间距有限.

命题 4.4. 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为一个保测系统, 若函数 $f \in L^2(X)$ 是几乎周期的, 则对任意 $\varepsilon > 0$ 集合

$$R_\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} : \ \|T^n f - f\|_2 < \varepsilon\}$$

是 syndetic 集.

证明. 固定 ε. 假设 $f \in \mathcal{H}_{ap}$, 由于 $O_f := \overline{\{T^n f : \ n \in \mathbb{N}\}}$ 为紧集, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$O_f \subset \bigcup_{j=0}^{N} \{g \in L^2(X) : \ \|T^j f - g\|_2 < \varepsilon\}. \tag{4.1}$$

假若 R_ε 不是 syndetic 的, 则对任意 $j \in \mathbb{N}$, 存在 n_j 满足 $R_\varepsilon \cap [n_j, n_j + j] = \emptyset$. 因为 O_f 是紧的, $\{T^{n_j} f\}$ 至少存在一个极限点 $g \in O_f$. 不难验证, 这个极限点满足对任意 $k \in \mathbb{N}$

$$\|T^k g - f\|_2 \geq \liminf_{j\to\infty} \|T^{n_j+k} f - f\|_2 \geq \varepsilon.$$

由于 T 为保测映射, 我们有对任意 $h \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $\|T^{k+h} f - T^h f\|_2 \geq \varepsilon$. 这与(4.1)矛盾. □

证明. (定理4.3) 设 $f \in L^\infty(X) \cap \mathcal{H}_{ap}$ 满足 $f \geq 0$, 且 f 不几乎处处为 0. 不失一般性我们可以假设 $\|f\|_\infty = 1$. 取 $\varepsilon = 1/2 \int_X f^k \, d\mu$, 则 $\varepsilon > 0$. 记

$$N_\varepsilon := \left\{ n \in \mathbb{N} : \ \|T^n f - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{k 2^k} \right\}.$$

设 $n \in N_\varepsilon$, 因为 T 是保测映射我们有对任意 $j \in \mathbb{N}$, $\|T^{jn} f - T^{(j+1)n}\|_2 < \varepsilon'$. 由三角不等式我们得: 对 $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, $\|f - T^{jn} f\|_2 < \varepsilon/2^k$. 记 $g_j = f - T^{jn} f$, 则

$$\int_X f T^n f \cdots T^{(k-1)n} f \, d\mu = \int_X f (f - g_1) \cdots (f - g_{k-1}) \, d\mu, \tag{4.2}$$

将(4.2) 右边展开, 会得到 $\int_X f^k \, d\mu$ 加上不多于 2^k 项, 其中每一项都具有形式 $\langle g_j, F \rangle$, 其中 $\|F\|_\infty \leq 1$, 于是 $|\langle g_j, F \rangle| < \varepsilon/2^k$. 因此

$$\int_X f T^n f \cdots T^{(k-1)n} f \, d\mu \geq \int_X f^k \, d\mu - \varepsilon = \varepsilon > 0.$$

设 b_ε 为 N_ε 的最大间距, 则

$$\begin{aligned}\liminf_{N\to\infty}\ \mathbb{E}_{n<N}\int_X fT^nf\cdots T^{(k-1)n}f\ d\mu &\ge \liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\in R\cap[0,N-1]}\int_X fT^nf\cdots T^{(k-1)n}f\ d\mu\\ &\ge \liminf_{N\to\infty}\frac{|R\cap[0,N-1]|}{N}\varepsilon\\ &\ge \frac{1}{2b_\varepsilon}\varepsilon>0.\end{aligned}$$

□

5 Roth 定理的证明

5.1 弱混合系统 v.s. 几乎周期系统

给定一个保测系统, 其并不一定要么是几乎周期的, 要么是弱混合的. 但是, 对于一个不是弱混合的系统, 其一定存在几乎周期的部分, 即

定理 5.1. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 是一个非弱混合的保测系统, 那么 $L^2(X)$ 中一定存在一个非常值的几乎周期函数.

这个定理的证明需要用到谱理论中的 Hergoltz 定理, 我们在这里略去. 感兴趣的读者可以参考 [6]. 此节的目的是给出一个保测系统的 L^2 空间的一个分解刻画, 为下一节 Roth 定理的证明做最后的准备.

定义 5.1. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, $f\in L^2(X)$. 我们称函数 f 是弱混合的是指

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_{n<N}|\langle T^nf,f\rangle|=0.$$

弱混合函数的全体构成的集合我们记为 $\mathcal{H}_{wm}$.

类似于几乎周期函数与几乎周期系统的关系, 弱混合函数与弱混合系统也有紧密的联系:

命题 5.2. 一个保测系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 是弱混合的当且仅当任意 $f\in L^2(X)$ 满足 $\int_X f\ d\mu=0$ 都有 $f\in\mathcal{H}_{wm}$.

这个命题必要性部分的证明是显然的. 对于弱混合的保测系统 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$, 由命题3.1(4) 知: 当 $f\in L^2$ 且 $\int_X f\ d\mu=0$ 时,

$$\lim_{N\to\infty}|\langle T^nf,f\rangle|=\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_{n<N}\left|\int_X T^nf\cdot\bar{f}\ d\mu-\int_X f\ d\mu\int_X\bar{f}\ d\mu\right|=0,$$

即 $f\in\mathcal{H}_{wm}$. 为了证明充分性, 我们要用到如下引理:

引理 5.3. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为保测系统, $f\in\mathcal{H}_{wm}$, 则对任意 $g\in L^2(X)$, 有

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_{n<N}|\langle T^nf,g\rangle|=0.$$

证明. 证明使用 van der Corput 引理 3.4. 不失一般性, 我们可以设 $\|f\|_2,\|g\|_2\le 1$ 设 $x_n=T^nf\overline{\langle T^nf,g\rangle}$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{h<H}\limsup_{N\to\infty}|\mathbb{E}_{n<N}\langle x_n,x_{n+h}\rangle| &= \mathbb{E}_{h<H}\limsup_{N\to\infty}\left|\mathbb{E}_{n<N}\overline{\langle T^nf,g\rangle}\langle T^{n+h}f,g\rangle\langle T^nf,T^{n+h}f\rangle\right|\\ &\le \mathbb{E}_{h<H}\|f\|_2^2\|g\|_2^2\left|\langle f,T^hf\rangle\right|.\end{aligned}$$

由于 $f \in \mathcal{H}_{wm}$, 上式两边对 H 取极限得

$$\lim_{H\to\infty} \mathbb{E}_{h<H} \limsup_{N\to\infty} |\mathbb{E}_{n<N}\langle x_n, x_{n+h}\rangle| = \|f\|_2^2\|g\|_2^2 \lim_{H\to\infty} \left|\langle T^h f, f\rangle\right| = 0.$$

由引理3.4, 我们知 $\mathbb{E}_{n<N} x_n = 0$. 因此

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} |\langle T^n f, g\rangle|^2 &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N}\langle T^n f, g\rangle\overline{\langle T^n f, g\rangle} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left\langle \mathbb{E}_{n<N} T^n f \overline{\langle T^n f, g\rangle}, g\right\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty} \langle \mathbb{E}_{n<N} x_n, g\rangle = 0,\end{aligned}$$

证毕. □

注 . 类似于命题3.1(4), 此引理由如下等价描述: 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统, $f \in \mathcal{H}_{wm}$, 则存在 $S \subset \mathbb{N}$, $d(S) = 1$ 使得对任意 $g \in L^2(X)$, 有

$$\lim_{n\to\infty,\ n\in S} |\langle T^n f, g\rangle| = 0.$$

证明. (命题5.2) 我们只需要证明充分性. 注意到对于任意 $f \in L^2(X)$, 令 $\tilde{f} := f - \int_X f\, d\mu$ 则 $\tilde{f}$ 满足 $\int_X \tilde{f}\, d\mu = 0$. 因此, 对任意 $g, h \in L^2(X)$,

$$\mathbb{E}_{n<N} \left|\int_X T^n g \cdot h\, d\mu - \int_X g\, d\mu \int_X h\, d\mu\right| = \mathbb{E}_{n<N} \left|\int_X T^n \tilde{g} \cdot \tilde{h}\, d\mu\right| = \mathbb{E}_{n<N}\langle T^n \tilde{g}, \bar{\tilde{h}}\rangle.$$

由条件知, $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathcal{H}_{wm}$, 故由引理5.3

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \left|\int_X T^n g \cdot h\, d\mu - \int_X g\, d\mu \int_X h\, d\mu\right| = \lim_{N\to\infty} \langle T^n \tilde{g}, \bar{\tilde{h}}\rangle = 0.$$

证毕. □

命题 5.4. 设 $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统. 若非零函数 $f \in L^2(X)$ 不是弱混合的, 则存在一个几乎周期函数 $\phi \in L^2(X)$ 满足 $\langle f, \phi\rangle \neq 0$.

证明. 注意到当 $\int_X f\, d\mu \neq 0$ 时, 我们取 $\phi = 1$ 即可. 接下来我们考虑 $\int_X f\, d\mu = 0$ 的情形. 不失一般性, 我们假设 $\|f\|_2 \le 1$.

定义函数 $K \in L^2(X \times X)$

$$K(x, y) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} T^n f(x) T^n \bar{f}(y),$$

由 von-Neumann 遍历定理知, K 是良好定义的. 事实上, 根据遍历定理我们还知道, K 就是函数 $f \otimes \bar{f} \in L^2(X \times X)$ 在 $(T \times T)$-不变函数空间上的投影, 即 K 是 $(T \times T)$-不变的. 定义函数

$$\phi(x) := \int_X K(x, y) f(y)\, d\mu(y),$$

我们有

$$\begin{aligned}\langle f, \phi\rangle &= \int_X f(x) \overline{\left(\int_X \left(\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} T^n f(x) T^n \bar{f}(y)\right) f(y)\, d\mu(y)\right)}\, d\mu(x) \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \left(\int_X f(x) T^n \bar{f}(x)\, d\mu(x)\right)\left(\int_X \bar{f}(y) T^n f(y)\, d\mu(y)\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} |\langle f, T^n f\rangle|^2 .\end{aligned}$$

在上式右边的第一行到第二行我们使用了控制收敛定理以及 Fubini 定理, 由于 f 不是弱混合的, 所以 $\langle f,\phi\rangle \neq 0$.

最后我们证明 ϕ 是几乎周期函数. 注意到

$$\begin{aligned} T^n\phi(x) &= \int_X K(T^n x,y)f(y)\ d\mu(y) \\ &= \int_X K(T^n x,T^n y)T^n f(y)\ d\mu(y) \\ &= \int_X K(x,y)T^n f(y)\ d\mu(y), \end{aligned}$$

其中最后一步用到了 K 是 $(T\times T)$- 不变的. 因此

$$\overline{\{T^n\phi:\ n\in\mathbb{N}\}} \subset \left\{\int_X K(x,y)g(y)\ d\mu(y):\ \|g\|_2\le 1\right\}.$$

由 Hilbert-Schmidt 定理 [2, Proposition 6.11] 知, 上式右边的闭包是紧的, 因此 ϕ 是几乎周期的. □

命题 5.5. 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为一个保测系统, 若函数 $f\in\mathcal{H}_{wm}$, 则对任意函数 $g\in\mathcal{H}_{ap}$, 有 $\langle f,g\rangle = 0$.

证明. 不失一般性我们假设 $\|f\|_2 = 1$. 固定 $\varepsilon>0$, 由于 $g\in\mathcal{H}_{ap}$, 故存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\overline{\{T^n g:\ n\in\mathbb{N}\}} \subset \bigcup_{j=0}^{N} B(T^j g,\varepsilon),$$

对任意 $m\in\mathbb{N}$, 记 $j_m\in\{0,1,\dots,N\}$ 满足 $T^m g\in B(T^{j_m},\varepsilon)$. 我们有

$$|\langle f,g\rangle| = |\langle T^m f,T^m g\rangle| = \left|\left\langle T^m f,T^{j_m}g + T^m g - T^{jm}g\right\rangle\right| \le \varepsilon + \left|\left\langle T^m f,T^{jm}g\right\rangle\right| \le \varepsilon + \sum_{j=0}^{N}\left|\left\langle T^m f,T^j g\right\rangle\right|.$$

因此, 对任意 $M\in\mathbb{N}$,

$$|\langle f,g\rangle| = \mathbb{E}_{m<M}\,|\langle T^m f,T^m g\rangle| \le \varepsilon + \sum_{j=0}^{N}\mathbb{E}_{m<M}\left|\left\langle T^m f,T^j g\right\rangle\right|.$$

利用引理5.3, 我们可以取 M 充分大使得对任意 $j\in\{0,1,\dots,N\}$, $\mathbb{E}_{m<M}\left|\left\langle T^m f,T^j g\right\rangle\right| < \varepsilon/j$. 所以我们有 $|\langle f,g\rangle| < 2\varepsilon$. 因为 ε 是任意的, 我们有 $\langle f,g\rangle = 0$. □

定理 5.6. (Jacobs-de Leeuw-Glicksberg 分解) 设 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 为一个保测系统, 则 $\mathcal{H}_{ap}$ 和 $\mathcal{H}_{wm}$ 为 $L^2(X)$ 的闭不变子空间, 它们相互正交且 $L^2(X) = \mathcal{H}_{ap}\oplus\mathcal{H}_{wm}$.

证明. 我们在之前已经证明了 $\mathcal{H}_{ap}$ 为闭不变子空间. 在这里我们先证明 $\mathcal{H}_{wm}$ 也是闭不变子空间. 其中不变子空间的部分由定义是显然的. 我们主要说明 $\mathcal{H}_{wm}$ 是一个闭集. 固定 $\varepsilon>0$, 对任意 $f\in\overline{\mathcal{H}_{wm}}$, 取 $g\in\mathcal{H}_{wm}\cap B(f,\varepsilon)$. 则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{n<N}\,|\langle T^n f,f\rangle| &\le \mathbb{E}_{n<N}\,|\langle T^n g,g\rangle| \\ &\quad + \mathbb{E}_{n<N}\left(|\langle T^n g,f-g\rangle| + |\langle T^n(f-g),g\rangle| + |\langle T^n(f-g),f-g\rangle|\right) \\ &\le \mathbb{E}_{n<N}\,|\langle T^n g,g\rangle| + 2\varepsilon\|g\|_2 + \varepsilon^2. \end{aligned}$$

因为 $g\in\mathcal{H}_{wm}\cap B(f,\varepsilon)$, 两边令 N 趋于 ∞ 并让 ε 趋于 0 得 $f\in\mathcal{H}_{wm}$. 所以 $\mathcal{H}_{wm}$ 为闭不变子空间.

由命题5.4 和命题 5.5 知 $f\in\mathcal{H}_{wm}$ 当且仅当其与 $\mathcal{H}_{ap}$ 正交, 所以有 $\mathcal{H}_{wm} = \mathcal{H}_{ap}^{\perp}$. 定理证毕.

□

5.2 Roth 定理

Roth 在 1953 年利用傅里叶分析的办法证明了如下结果:

定理 5.7. 设 $A \subset \mathbb{N}$ 有正上密度, 则 A 中包含了长度为 3 的等差数列.

我们在之前已经通过 Furstenberg 对应原则将定理5.7转换为如下关于保测系统的多重回复问题.

定理 5.8. $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为一个保测系统, 设 $A \in \mathcal{B}$ 满足 $\mu(A) > 0$, 则存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\mu(A \cap T^{-n}A \cap T^{-2n}A) > 0$. 事实上我们有

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N}\ \mu(A \cap T^{-n}A \cap T^{-2n}A) > 0. \tag{5.1}$$

在第二章结尾我们已经证明了, 通过遍历分解定理, 我们可以假设 $\mathbf{X}$ 是遍历系统. 证明定理5.8的基本思想是利用定理5.6将 A 的示性函数 1_A 分解为一个几乎周期函数和弱混合函数的和, 即 $1_A = f_{ap} + f_{wm}$. 这样我们就能将 (5.1) 展开为 4 项.

$$\begin{aligned}\mu(A \cap T^{-n}A \cap T^{-2n}A) &= \int_X 1_A \cdot T^n 1_A \cdot T^{2n} 1_A \ d\mu \\ &= \int_X 1_A \cdot T^n (f_{ap} + f_{wm}) \cdot T^{2n}(f_{ap} + f_{wm})\ d\mu \\ &= \int_X 1_A \cdot T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{ap}\ d\mu + \int_X 1_A \cdot T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{wm}\ d\mu \\ &\quad + \int_X 1_A \cdot T^n f_{wm} \cdot T^{2n} f_{ap}\ d\mu + \int_X 1_A \cdot T^n f_{wm} \cdot T^{2n} f_{wm}\ d\mu.\end{aligned}$$

根据定理4.3, 我们希望上式右边第一项求平均之后为正; 根据正交性, 我们可以期望中间两项求平均之后为 0; 最后根据弱混合函数的性质, 我们能证明最后一项求平均后也为 0. 接下来我们一步步的建立我们需要的一些引理.

引理 5.9. 设 $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为保测系统, 令 $f \in L^2(X)$, 设 $f = f_{ap} + f_{wm}$ 为形如定理5.6 中的分解, 若 f 的值域在 $[0,1]$ 中, 则 f_{ap} 的值域也在 $[0,1]$ 中.

证明. 设 $g_0 = \Re f_{ap}$ 为函数 f_{ap} 的实部. 显然有

$$\overline{\{T^n g_0 :\ n \in \mathbb{N}\}} = \Re\overline{\{T^n f_{ap} :\ n \in \mathbb{N}\}}.$$

因为 $\Re : L^2(X) \to L^2(X)$ 为连续的, 所以 $\Re\overline{\{T^n f_{ap} :\ n \in \mathbb{N}\}}$ 也是紧的, 从而 $g_0 = \Re f_{ap} \in \mathcal{H}_{ap}$. 又因为常数函数都是几乎周期函数, 所以由引理4.1知 $g_1 := \min(g_0, 1)$, $g := \max(g_1, 0)$ 都是几乎周期的. 显然 g 的值域在 $[0,1]$ 中, 且 $\|g_0 - f\|_2 \le \|f_{ap} - f\|_2$. 因此有

$$\|g - f\|_2 \le \|g_1 - f\|_2 \le \|g_0 - f\|_2 \le \|f_{ap} - f\|_2.$$

接下来我们证明 $f_{ap} = g$. 因为 $f - f_{ap} \in \mathcal{H}_{wm}$, 我们有 $f - f_{ap} \in \mathcal{H}_{ap}$. 特别地, 因为 $f_{ap} - g \in \mathcal{H}_{ap}$, 所以

$$\|f - f_{ap}\|_2^2 \ge \|f - g\|_2^2 = \|(f - f_{ap}) + (f_{ap} - g)\|_2^2 = \|f - f_{ap}\|_2^2 + \|f_{ap} - g\|_2^2$$

从这我们可以看出 $\|f_{ap} - g\|_2^2 = 0$, 证毕. □

引理 5.10. 设 $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为可逆遍历的保测系统, 令 $f, g \in L^2(X)$. 如果 f, g 中有任何一个是弱混合的, 则

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} T^n f \cdot T^{2n} g \xrightarrow{L^2} 0,\ N \to \infty.$$

证明. 我们使用 van der Corput 引理. 设 $x_n = T^n f \cdot T^{2n} g$, 我们有

$$\langle x_{n+h}, x_n \rangle = \int_X T^{n+h} f \cdot T^{2n+2h} g \cdot T^n \bar{f} \cdot T^{2n} \bar{g} \, d\mu \tag{5.2}$$
$$= \int_X (T^h f \cdot \bar{f}) \cdot T^n (T^{2h} g \cdot \bar{g}) \, d\mu \tag{5.3}$$
$$= \int_X T^{-n} (T^h f \cdot \bar{f}) \cdot (T^{2h} g \cdot \bar{g}) \, d\mu. \tag{5.4}$$

当 f 弱混合时我们运用5.4; g 弱混合时我们运用5.3.

先设 f 弱混合, 则利用5.4和 von Neumann 遍历定理

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} |\mathbb{E}_{n<N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle| &= \limsup_{N\to\infty} \left| \int_X \mathbb{E}_{n<N} \left(T^{-n}(T^h f \cdot \bar{f}) \right) \cdot (T^{2h} g \cdot \bar{g}) \, d\mu \right| \\
&\le \int_X \left| \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \left(T^{-n}(T^h f \cdot \bar{f}) \right) \cdot (T^{2h} g \cdot \bar{g}) \right| d\mu \\
&= \int_X \left| \int_X T^h f \cdot \bar{f} \, d\mu \cdot (T^{2h} g \cdot \bar{g}) \right| d\mu \\
&\le \|g\|_\infty^2 \left| \left\langle T^h f, f \right\rangle \right|.
\end{aligned}$$

由于 f 弱混合, 所以有 $\lim_{H\to\infty} \mathbb{E}_{h<H} \left| \left\langle T^h f, f \right\rangle \right| = 0$. 从而由 van der Corput 引理

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} \|\mathbb{E}_{n<N} x_n\|_2^2 &\le \limsup_{H\to\infty} \left| \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle \right| \\
&\le \limsup_{H\to\infty} \limsup_{N\to\infty} |\mathbb{E}_{n<N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle| \\
&\le \limsup_{H\to\infty} \|g\|_\infty^2 \left| \left\langle T^h f, f \right\rangle \right| = 0.
\end{aligned}$$

接着我们假设 g 是弱混合的, 利用5.3 和 von Neumann 遍历定理, 完全类似的计算我们有

$$\limsup_{N\to\infty} |\mathbb{E}_{n<N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle| \le \|f\|_\infty^2 \left| \left\langle T^{2h} g, g \right\rangle \right|.$$

利用 g 是弱混合的我们可以得到 $\limsup\limits_{N\to\infty} \|\mathbb{E}_{n<N} x_n\|_2^2 = 0$.

□

终于, 我们能够证明当系统为可逆遍历系统时的定理5.8.

定理 5.11. 设 $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 为可逆遍历的保测系统, $A \in \mathcal{B}$ 满足 $\mu(A) > 0$, 则

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \, \mu(A \cap T^{-n} A \cap T^{-2n} A) > 0. \tag{5.5}$$

证明. 利用定理5.6, 我们将 1_A 分解为 $f_{ap} + f_{wm}$, 其中 $f_{ap} \in \mathcal{H}_{ap}$, $f_{wm} \in \mathcal{H}_{wm}$. 由引理5.9, 我们知道 f_{ap} 的值域在 $[0,1]$ 中. 又因为 $1 \in \mathcal{H}_{ap}$, 所以 $1 \perp f_{wm}$, 从而

$$\int_X f_{ap} \, d\mu = \left\langle f_{ap}, 1 \right\rangle = \langle 1_A, 1 \rangle = \mu(A) > 0$$

因此 f_{ap} 不是几乎处处为 0, 从而利用定理4.3 知

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \int_X f_{ap} \cdot T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{ap} \, d\mu > 0.$$

由命题4.2(2), $T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{ap} \in \mathcal{H}_{ap}$, 所以 $\left\langle T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{ap}, f_{wm} \right\rangle = 0$, 从而

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \int_X 1_A \cdot T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{ap} \, d\mu = \liminf_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \int_X f_{ap} \cdot T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{ap} \, d\mu > 0. \tag{5.6}$$

接下来, 使用引理5.10 3 次我们可以分别得到

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \int_X 1_A \cdot T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{wm} \, d\mu = 0; \tag{5.7}$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \int_X 1_A \cdot T^n f_{wm} \cdot T^{2n} f_{ap} \, d\mu = 0; \tag{5.8}$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n<N} \int_X 1_A \cdot T^n f_{wm} \cdot T^{2n} f_{wm} \, d\mu = 0. \tag{5.9}$$

最后, 将 (5.6), (5.7),(5.8) 和 (5.9) 加起来我们就得到了(5.5). □

注 . 在引理5.10 和定理 5.11 时, 我们假设了保测系统是可逆的. 事实上, 这并不是一个不合理的假设, 因为给定一个保测系统 $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$, 我们总是能构造一个可逆的保测系统 $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$(这个系统称为是 $\mathbf{X}$ 的可逆扩充) 满足(5.1)对 $\mathbf{X}$ 成立当且仅当对 $\tilde{\mathbf{X}}$ 成立. 接下来我们阐述构造的细节.

$\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ 是一个保测系统, 我们定义

- ♣ $\tilde{X} := \{x \in X^{\mathbb{Z}} : \ x_{k+1} = T x_k, \ k \in \mathbb{Z}\}$;
- ♣ 对任意 $k \in \mathbb{Z}, \ x \in \tilde{X}$, $(\tilde{T} x)_k = x_{k+1}$;
- ♣ 对任意 $A \in \mathcal{B}$, $\tilde{\mu}(\{x \in X : \ x_0 \in A\}) = \mu(A)$. 不难发现

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(\tilde{T}^{-1}\{x \in \tilde{X} : \ x_0 \in A\}) &= \tilde{\mu}\{x \in \tilde{X} : \ x_1 \in A\} \\
&= \tilde{\mu}(\{x \in \tilde{X} : \ x_0 \in T^{-1}A\}) \\
&= \mu(T^{-1}A) = \mu(A) = \tilde{\mu}(\{x \in \tilde{X} : \ x_0 \in A\}).
\end{aligned}$$

- ♣ $\tilde{\mathcal{B}}$ 为最小的 $\tilde{T}-$ 不变的, 使得对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 映射 $\tilde{X} \to X, \ x \to x_n$ 可测的 $\sigma-$ 代数

$\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ 为一个保测系统, 称为是 $\mathbf{X}$ 的可逆扩充.

参考文献

[1] Manfred Einsiedler and Thomas Ward. Ergodic theory with a view towards number theory. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.

[2] Manfred Einsiedler, Thomas Ward, et al. Functional analysis, spectral theory, and applications, volume 276. Springer, 2017.

[3] H. Furstenberg. Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981. M. B. Porter Lectures.

[4] Harry Furstenberg. Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. J. Analyse Math., 31:204–256, 1977.

[5] Bernard Host and Bryna Kra. Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds. Ann. of Math. (2), 161:397–488, 2005.

[6] Mahendra Ganpatrao Nadkarni et al. Spectral theory of dynamical systems. Springer, 1998.

[7] K. F. Roth. On certain sets of integers. Journal of the London Mathematical Society, s1-28(1):104–109.

[8] Terence Tao. The dichotomy between structure and randomness, arithmetic progressions, and the primes. 2005.

[9] Peter Walters. An introduction to ergodic theory, volume 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.